2025年度

Cₐ 数 学 問 題

注　意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

I．次の空欄ア〜ケにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（i） 自然数 n に対して $a_n = 2^n$ とし，積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を A_n とおく。このとき $A_n \geqq 10^{10}$ を満たす最小の n は $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，$\log_2 10 = 3.3219$ とする。

（ii） 2つの平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$|\vec{a}+\vec{b}| = 4$，$|\vec{a}-\vec{b}| = 2$ を満たすとする。このとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2 + |3\vec{a}-2\vec{b}|^2$ の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

（iii） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{7\pi}{6}} \sin x \sin 2x \, dx$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

（iv） 箱の中に緑色のカードが5枚，黄色のカードが4枚，赤色のカードが3枚入っている。箱から無作為にカードを3枚取り出すとき，3枚とも同じ色である確率は $\boxed{\text{オ}}$，3枚の色がすべて異なる確率は $\boxed{\text{カ}}$，2枚が同じ色であり，かつ，残りの1枚が他の2枚と異なる色である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

（v） i を虚数単位とする。実数 a，b が等式

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^9 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11} = a + bi$$

を満たすとき，$a = \boxed{\text{ク}}$，$b = \boxed{\text{ケ}}$ である。

Ⅱ. 実数 x に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x + 4\sin x\cos x$$

により定める。また，$t = \sin x + \cos x$ とおく。次の問（ i ）〜（iv）に答えよ。解答欄には，（ i ），（ii）については答えのみを，（iii），（iv）については答えだけでなく途中経過も書くこと。

（ i ）　$\sin x\cos x$ を t を用いて表せ。

（ii）　$f(x)$ を t を用いて表せ。

（iii）　x がすべての実数を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

（iv）　x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

Ⅲ. a, p を正の実数とする。座標平面上の曲線 C_1 : $y = e^x$ と C_1 上の点 $\mathrm{P}(p, e^p)$ がある。P における C_1 の法線を ℓ, ℓ と x 軸の交点を $\mathrm{A}(a, 0)$, A を中心とする半径 r の円を C_2 とする。P が C_1 と C_2 のただ一つの共有点であるとき，次の問(i)〜(v)に答えよ。解答欄には，(i)〜(iii)については答えのみを，(iv)，(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) ℓ の方程式を p を用いて表せ。

(ii) a を p を用いて表せ。

(iii) r を p を用いて表せ。

(iv) $\angle \mathrm{OAP} = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，p の値を求めよ。

(v) p を(iv)で求めた値とするとき，次の不等式の表す領域 D の面積 S を求めよ。

$$-2 \leqq x \leqq p, \quad y \geqq 0, \quad y \leqq e^x, \quad (x-a)^2 + y^2 \geqq r^2.$$

Ⅳ． n を 2 以上の自然数とする。次の問(i)～(iv)に答えよ。

(i) $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを示せ。

(ii) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ は 24 の倍数であることを示せ。

(iii) n に関する数学的帰納法を用いて，$n^5 + 4n$ は 5 の倍数であることを示せ。

(iv) $n^9 + 2n^8 - n^7 - 2n^6 + 4n^5 + 8n^4 - 4n^3 - 8n^2$ は 120 の倍数であることを示せ。

【以下余白】